

УДК 519.246.8+519.254+519.237.7

ВАРИАНТЫ МЕТОДА «ГУСЕНИЦА»-SSA ДЛЯ ПРОГНОЗА МНОГОМЕРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Д.В. Степанов, аспирант

*Санкт-Петербургский государственный университет,
Математико-механический факультет*

Россия, 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28

E-mail: dmitry.stepanov@mail.ru

Н.Э. Голяндина, к.ф.-м.н., доцент

*Санкт-Петербургский государственный университет,
Математико-механический факультет*

Россия, 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28

E-mail: nina@ng1174.spb.edu

Ключевые слова: многомерные временные ряды, анализ сингулярного спектра, ряды конечного ранга, линейная рекуррентная формула, прогноз временных рядов

Key words: multidimensional time series, singular spectrum analysis, time series of finite rank, linear recurrent formula, time series forecast

В данной работе рассматривается задача построения прогноза системы временных рядов с помощью многомерного обобщения метода «Гусеница»-SSA. Построены алгоритмы двух вариантов многомерного продолжения (L and K - продолжение) и приведены условия продолжимости. На модельных примерах проведено сравнение рассмотренных методов прогноза между собой, а также с результатами применения SSA-прогноза к одномерным рядам по отдельности. Дополнительную информацию о методе и соответствующем программном обеспечении можно найти на сайте по адресу <http://www.gistatgroup.com/gus/>

VARIANTS OF THE «CATERPILLAR»-SSA METHOD FOR FORECASTING OF MULTIDIMENSIONAL TIME SERIES / D.V. Stepanov (Mathematical Department, St.Petersburg State University, Universitetskij pr. 28, St.Petersburg Petrodvorets 198504, Russia, E-mail: dmitry.stepanov@mail.ru), N.E. Golyandina (Mathematical Department, St.Petersburg State University, Universitetskij pr. 28, St.Petersburg Petrodvorets 198504, Russia, E-mail: nina@ng1174.spb.edu). The problem of construction of simultaneous forecasts for several time series with the help of multidimensional generalization of the «Caterpillar»-SSA method is considered. Algorithms of two variants of multidimensional continuation (L and K -continuation) are constructed and conditions of their existence are given. Investigation and comparison of the considered forecasting methods by means of simulation is performed. Additional information on the SSA method, its abilities and the corresponding software can be found on the site <http://www.gistatgroup.com/cat/>

1. Введение

В данной работе рассматривается задача прогноза временных рядов с помощью метода «Гусеница»-SSA. А именно, исследуется многомерное обобщение метода для одновременного прогноза системы временных рядов.

Метод возник как метод анализа и первоначально применялся к одномерным временным рядам (список соответствующей литературы можно найти в [1,3]). Отличительной чертой метода является то, что он не требует предварительного задания модели ряда. Тем не менее, он позволяет раскладывать временной ряд на интерпретируемые составляющие, такие как тренд (в частности, линейный или экспоненциальный), периодические компоненты и шум. При этом не надо заранее знать параметрический вид тренда, а также о наличие колебательных компонент и их периодах.

Техническую основу метода составляет сингулярное разложение траекторной матрицы, столбцами которой являются вектора вложения – отрезки ряда длины L , основного параметра метода, называемого длиной окна. Анализ членов сингулярного разложения позволяет сначала классифицировать их как относящиеся к одной из компонент ряда, а затем выделить эту компоненту.

Важным направлением развития метода SSA как метода анализа временных рядов является его обобщение для анализа многомерных временных рядов (см. [2,5] и ссылки на зарубежную литературу в [1]). За рубежом метод известен под названиями MSSA (Multi-Channel SSA) и E-EOFs (Extended Empirical Orthogonal Functions). Существует еще специальное обобщение SSA на двумерный случай – комплексный SSA (CSSA), но в данной работе мы не будем на нем останавливаться. Перенос теории анализа одномерных рядов, изложенной в [3,6], на многомерный случай (MSSA и CSSA) был проведен в работе [5]. В частности, там исследовались вопросы, какие именно компоненты можно разделить тем или иным методом, какой метод в каком случае проявляется себя лучше, как выбирать параметры. Конечно, не всегда удастся точно разделить компоненты ряда (например, отделить сигнал от шума) – в этом случае приходится говорить о приближенной делимости. Численные эксперименты подтверждают, что если ряды имеют похожую структуру (например, ряды имеют периодическую компоненту с одним и тем же периодом), то MSSA позволяет построить более точное разложение рядов по сравнению с применением одномерного SSA к рядам по отдельности (что вполне естественно с общей точки зрения). При разных структурах рядов MSSA может несколько проигрывать по сравнению с SSA.

Как только появляется метод, позволяющий выявлять структуру временного ряда, сразу возникает желание научиться продолжать эту структуру, строя тем самым прогноз (продолжение) временного ряда. В одномерном методе «Гусеница»-SSA такую структуру задает линейная рекуррентная формула (ЛРФ), управляющая рядом. Известно, что любой ряд, являющийся суммой произведений полиномов, экспонент и гармоник, можно задать с помощью линейной рекуррентной формулы и начальных значений. Метод SSA позволяет находить коэффициенты линейной рекуррентной формулы, управляющей рядом (или его составляющей) и, следовательно, продолжить ряд [3,7]. Данный метод расширяется на случай, когда продолжаемый ряд лишь аппроксимируется рядом, управляемым ЛРФ.

Ряды, управляемые ЛРФ, тесно связаны с рядами конечного ранга, т.е. рядами, сингулярное разложение которых при достаточно большой длине ряда N и достаточно большой длине окна L имеет фиксированное число ненулевых

компонент. Это означает, что вектора, составленные из L -мерных отрезков временных рядов, лежат в некотором подпространстве L -мерного евклидова пространства. При некоторых не очень существенных условиях размерность этого подпространства совпадает с размерностью минимальной ЛРФ, управляющей рядом, и базис подпространства определяет коэффициенты управляющей линейной рекуррентной формулы (не обязательно минимальной размерности). Именно таким способом метод «Гусеница»-SSA и определяет (приближенную) управляющую ЛРФ, тем самым, находя продолжающую ряд формулу. В случае рядов конечного ряда можно сказать, что мы продолжаем ряд, строя последовательность векторов, лежащую в заданном подпространстве.

В случае прогноза, построенного на основе многомерного SSA, используются аналогичные идеи. Однако есть и отличия. Понятие многомерного ряда конечного ранга является более сложным. Если каждый из рядов имел конечную размерность (управлялся ЛРФ), то и система таких рядов будет иметь конечный ранг. При этом если ряды совершенно разной структуры, то это выразится в том, что ранг системы рядов будет равен сумме рангов рядов, ее составляющих. Если ряды имеют одинаковую структуру (и, как следствие, одинаковую размерность), то система таких согласованных рядов будет иметь ранг, равный той же самой размерности. Другое отличие состоит в том, что из-за несимметричности траекторной матрицы возникает два разных способа продолжения, в пространстве столбцов (как и в одномерном случае) и в пространстве строк. В частном случае, когда каждый из рядов управляется ЛРФ, продолжения в пространстве строк и столбцов совпадают. Однако при прогнозе реальных рядов, когда речь идет лишь о приближенном продолжении (т.е. прогнозе), эти два метода дают различные результаты.

Кратко остановимся на структуре работы. Во втором разделе данной работы излагается алгоритмическая структура метода MSSA. Третий раздел посвящен описанию многомерных временных рядов, управляемых линейными рекуррентными формулами, а четвертый – понятию продолжения временных рядов. В нем строятся алгоритмы продолжения и приводятся условия продолжимости рядов. Построенные алгоритмы могут быть применены не только для продолжения рядов, но и для их прогноза. В пятом разделе показывается, как именно строится прогноз, и с помощью метода Монте-Карло исследуются свойства рассмотренных вариантов прогноза многомерных временных рядов.

2. Алгоритм многомерного общения

Данный раздел содержит описание алгоритма MSSA, многомерного обобщения метода SSA.

Сначала введем несколько определений, касающихся перехода от временного ряда к матрице и наоборот. Пусть $G_N = (g_0, \dots, g_{N-1})$ – ряд длины N . Процедура вложения есть преобразование исходного одномерного ряда в последовательность L -мерных векторов, число которых равно $K = N - L + 1$:

$$Z_j = (g_{j-1}, \dots, g_{j+L-2})^T, \quad 1 \leq j \leq K.$$

Эти вектора, называемые *векторами L -вложения*, образуют *траекторную матрицу* временного ряда G_N : $\mathbf{Z} = [Z_1 : \dots : Z_K]$. Записывая матрицу более по-

дробно, заметим, что $z_{jk} = g_{j+k-2}$, т.е. матрица \mathbf{Z} имеет одинаковые элементы на диагонали $j+k = \text{const}$:

$$\mathbf{Z} = (z_{jk})_{j,k=1}^{LK} = \begin{pmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_{K-1} \\ g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_K \\ g_2 & g_3 & g_4 & \cdots & g_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{L-1} & g_L & g_{L+1} & \cdots & g_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Теперь опишем обратный переход от матрицы к ряду, называемый диагональным усреднением. Пусть \mathbf{Y} – матрица размера $L \times K$ с элементами y_{ik} , $1 \leq j \leq L$, $1 \leq k \leq K$. Положим $L^* = \min(L, K)$, $K^* = \max(L, K)$ и $N = L + K - 1$. Пусть $z_{jk} = y_{jk}$, если $L < K$, и $z_{jk} = y_{kj}$ в остальных случаях.

Диагональное усреднение переводит матрицу \mathbf{Y} в ряд $H = (h_0, \dots, h_{N-1})$ по формуле

$$(1) \quad h_k = \begin{cases} \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} z_{j,k-j+2} & \text{для } 0 \leq k < L^* - 1, \\ \frac{1}{L^*} \sum_{j=1}^{L^*} z_{j,k-j+2} & \text{для } L^* - 1 \leq k < K^*, \\ \frac{1}{N-k} \sum_{j=k-K^*+2}^{N-K^*+1} z_{j,k-j+2} & \text{для } K^* \leq k < N. \end{cases}$$

Это выражение соответствует усреднению элементов матрицы вдоль «диагоналей» $j+l = k+2$: выбор $k=0$ дает $h_0 = y_{11}$, для $k=1$ получаем $h_1 = (y_{12} + y_{21})/2$ и т.д.

Теперь мы можем непосредственно перейти к описанию алгоритма. Пусть наблюдается система из s временных рядов произвольной длины $F^{(k)} = (f_j^{(k)})_{j=0}^{N_k-1}$, где $k=1, \dots, s$. Параметр N_k есть длина k -го ряда.

2.1. Шаг 1: вложение

Выберем длину окна L такую, что $1 < L < N_k$ для любого k .

Для каждого k вычислим $K_k = N_k - L + 1$ векторов L -вложения

$$\mathbf{X}_j^{(k)} = (f_{j-1}^{(k)}, \dots, f_{j+L-2}^{(k)})^T, \quad 1 \leq j \leq K_k.$$

Тогда траекторная матрица многомерного ряда $(F^{(1)}, \dots, F^{(s)})$ будет иметь вид

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1^{(1)} : \dots : \mathbf{X}_{K_1}^{(1)} : \dots : \mathbf{X}_1^{(s)} : \dots : \mathbf{X}_{K_s}^{(s)}] = [\mathbf{X}^{(1)} : \dots : \mathbf{X}^{(s)}],$$

где $\mathbf{X}^{(k)}$ – траекторная матрица ряда $F^{(k)}$, соответствующая длине окна L . Размерность матрицы \mathbf{X} равна $L \times \sum_{k=1}^s K_k$.

2.2. Шаг 2: сингулярное разложение

Результатом этого шага является сингулярное разложение траекторной матрицы ряда.

Образуем матрицу $\mathbf{S} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T = \mathbf{X}^{(1)}\mathbf{X}^{(1)T} + \dots + \mathbf{X}^{(s)}\mathbf{X}^{(s)T}$.

Поскольку \mathbf{S} неотрицательно определена, то ее собственные числа неотрицательны. Обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_L$ собственные числа матрицы \mathbf{S} , взятые в порядке убывания ($\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_L \geq 0$), и через U_1, \dots, U_L – ортонормированную систему собственных векторов матрицы \mathbf{S} , соответствующих этим собственным числам.

Пусть $d = \max\{j, \text{таких, что } \lambda_j > 0\}$. Обозначив $V_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\mathbf{X}^T U_j$ для

$j = 1, \dots, d$, получим разложение траекторной матрицы:

$$(2) \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \dots + \mathbf{X}_d, \text{ где } \mathbf{X}_j = \sqrt{\lambda_j} U_j V_j^T.$$

Отметим, что ортонормированные вектора V_j являются собственными векторами матрицы $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$, соответствующими тем же собственным числам λ_j .

В стандартной терминологии $\sqrt{\lambda_j}$ называются *сингулярными числами*, U_j и V_j – *левыми* и *правыми сингулярными векторами* матрицы \mathbf{X} соответственно. Каждая из матриц \mathbf{X}_j имеет ранг 1. Поэтому их можно назвать *элементарными матрицами*. Набор $(\sqrt{\lambda_j}, U_j, V_j)$ мы будем называть *j -й собственной тройкой* сингулярного разложения.

На геометрическом языке система собственных векторов U_j задает ортонормированный базис в линейном пространстве, порождаемом столбцами исходной матрицы \mathbf{X} . Аналогично, вектора V_j задают ортонормированный базис линейного пространства, порождаемого строками матрицы \mathbf{X} .

Разложение траекторной матрицы многомерного ряда $(F^{(1)}, \dots, F^{(s)})$ можно записать в виде

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^d [U_k U_k^T \mathbf{X}^{(1)} : \dots : U_k U_k^T \mathbf{X}^{(s)}].$$

Таким образом, для каждого из рядов получено разложение столбцов их траекторных матриц (векторов вложения) по общему базису (U_1, \dots, U_d) :

$$(3) \quad \mathbf{X}^{(1)} = \sum_{k=1}^d U_k U_k^T \mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(s)} = \sum_{k=1}^d U_k U_k^T \mathbf{X}^{(s)}.$$

Отметим, что эти разложения, однако, не обязаны быть сингулярными разложениями траекторных матриц одномерных рядов.

2.3. Шаг 3: группировка

На основе разложения (2) процедура группировки разделяет все множество индексов $\{1, \dots, d\}$ на m непересекающихся подмножеств I_1, \dots, I_m .

Пусть $I = \{i_1, \dots, i_p\}$. Тогда *результатирующая* матрица \mathbf{X}_I , соответствующая группе I , определяется как $\mathbf{X}_I = \mathbf{X}_{i_1} + \dots + \mathbf{X}_{i_p}$. Такие матрицы вычисляются для $I = I_1, \dots, I_m$, и разложение может быть записано в сгруппированном виде:

$$(4) \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}_{I_1} + \dots + \mathbf{X}_{I_m}.$$

Процедура выбора множеств I_1, \dots, I_m и называется *группировкой собственных троек*.

2.4. Шаг 4: диагональное усреднение

На последнем шаге базового алгоритма каждая матрица сгруппированного разложения переводится в систему новых рядов длины N .

Каждая матрица \mathbf{X}_{I_j} в сгруппированном разложении (4) разбивается на последовательно расположенные матрицы соответствующего размера: $\mathbf{X}_{I_j} = [\mathbf{X}_{I_j}^{(1)} : \mathbf{X}_{I_j}^{(2)} : \dots : \mathbf{X}_{I_j}^{(s)}]$. После этого для каждой из матриц $\mathbf{X}_{I_j}^{(k)}$, $k = 1, \dots, s$, производится диагональное усреднение по формуле (1), которое переводит ее в ряд $\tilde{F}_{I_j}^{(k)}$. В результате каждое слагаемое в правой части (4) порождает многомерный временной ряд $(\tilde{F}_{I_j}^{(1)}, \dots, \tilde{F}_{I_j}^{(s)})$ – *восстановленную аддитивную компоненту* исходного ряда $(F^{(1)}, \dots, F^{(s)})$.

Таким образом, результатом применения алгоритма SSA как к одномерному ($s=1$), так и к многомерному ряду является его представление в виде суммы m рядов. Параметрами метода являются длина окна L и способ группировки элементарных матриц.

Для случая $s=1$ описанный выше алгоритм полностью совпадает с базовым алгоритмом SSA для анализа одномерных временных рядов.

3. Ряды конечного ранга и ЛРФ

3.1. Основные понятия и определения

Суммируя и обобщая результаты, описанные в [3], можно дать несколько эквивалентных определений многомерного ряда ранга d .

Многомерный ряд, состоящий из системы бесконечных вправо рядов, называется рядом конечного ранга d , если для любой длины окна $L \geq d$ выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

- 1) сингулярное разложение траекторной матрицы системы рядов имеет ровно d ненулевых компонент,
- 2) пространство $\Lambda^{(L)}$, натянутое на вектора вложения многомерного ряда (оно называется *траекторным пространством ряда*) имеет размерность d .

Для одномерных рядов можно ввести также понятие размерности ряда как минимальной размерности d *линейной рекуррентной формулы* (ЛРФ)

$$(5) \quad f_{j+d} = \sum_{k=1}^d a_k f_{j+d-k}, \text{ где } a_d \neq 0,$$

управляющей рядом.

Соотношение рядов конечного ранга и конечной размерности в контексте метода SSA является важным для построения прогноза, так как метод на этапе группировки дает нам подпространства, натянутые на собственные вектора с номерами из I_r , $r = 1, \dots, m$, а для построения продолжения соответствующих рядов \tilde{F}_{I_r} нам нужны линейные рекуррентные формулы.

Для бесконечных в обе стороны одномерных временных рядов $F = (\dots, f_{-1}, f_0, f_1, \dots)$ ряд является рядом ранга d тогда и только тогда, когда он является рядом размерности d .

Для рядов вида $F = (f_0, f_1, \dots)$, бесконечных вправо, этот же результат верен, если не требовать выполнения условия $a_d \neq 0$ в (5).

Если рассматривать ряды конечной длины, то из того, что ряд является рядом конечной размерности, следует, что он является рядом конечного ранга. Обратный результат, вообще говоря, не верен (теорема Бухштабера [3]). Именно это и служит причиной того, что при исследовании продолжимости рядов конечного ранга возникают условия этой продолжимости. В то же время, ряд, управляемый линейной рекуррентной формулой, является всегда продолжимым с помощью этой ЛРФ вне зависимости от выполнения условия $a_d \neq 0$.

Нам понадобится ввести еще одно понятие, связанное с рядами, управляемыми ЛРФ.

Рассмотрим *характеристический полином* линейной рекуррентной формулы (5) ряда $F = (f_0, f_1, \dots)$:

$$(6) \quad P_d(\lambda) = \lambda^d - \sum_{k=1}^d a_k \lambda^{d-k}.$$

Обозначим за k_m кратности его различных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, т.е. $1 \leq m \leq p$ и $k_1 + \dots + k_p = d$. Тогда (см., например, [3]) верно следующее утверждение.

Предложение 3.1. Ряд F удовлетворяет линейной рекуррентной формуле (5) тогда и только тогда, когда имеет место выражение

$$(7) \quad f_n = \sum_{m=1}^p \left(\sum_{j=0}^{k_m-1} c_{mj} \lambda_m^n n^j \right),$$

где комплексные коэффициенты $c_{mj} \neq 0$ определяются первыми d элементами ряда f_0, \dots, f_{d-1} .

Замечание 3.1. Слагаемое в скобках в правой части (7), соответствующее фиксированному m , назовем *вкладом корня* λ_m в ряд F . Аналогичным образом можно определить вклад произвольного набора корней.

Замечание 3.2. Вклад вещественного корня λ_m имеет форму полинома по n , умноженного на λ_m^n (т.е., на экспоненту). Более того, соответствующие ему коэффициенты c_{mj} также вещественны. Если корень λ_m является комплексным, то характеристический полином (6) имеет также сопряженный к нему комплексный корень λ_l той же кратности. Обозначим их как $\lambda_m = \rho^{i2\pi\omega}$ и $\lambda_l = \rho^{-i2\pi\omega}$ с $\omega \in (0, 1/2)$. В этом случае соответствующие коэффициенты c_{mj} и c_{lj} также являются сопряженными комплексными числами. Несложно показать, что *совместный вклад комплексно-сопряженных корней* λ_m и λ_l имеет вид полинома по n степени $k_m - 1$ с вещественными коэффициентами, умноженного на $\rho^n \cos(2\pi\omega n + \phi)$.

Обозначим для любого ненулевого комплексного $\lambda = \rho^{i2\pi\omega}$, $-1/2 < \omega \leq 1/2$ и $j \geq 0$

$$Q(\lambda, j) = \begin{pmatrix} \lambda^0 0^j \\ \lambda^1 1^j \\ \vdots \\ \lambda^{L-1} (L-1)^j \end{pmatrix},$$

$$P(\lambda, j) = \begin{cases} Q(\lambda, j), & \text{если } \omega = 0 \text{ или } \omega = 1/2, \\ \operatorname{Re}(Q(\lambda, j)), & \text{если } 0 < \omega < 1/2, \\ \operatorname{Im}(Q(\lambda, j)), & \text{если } -1/2 < \omega < 0. \end{cases}$$

Здесь $\operatorname{Re}(X)$ и $\operatorname{Im}(X)$ – вещественная и мнимая части вектора X , $Q(\lambda, j) \in \mathbf{C}^L$, а $P(\lambda, j) \in \mathbf{R}^L$.

Предложение 3.2. Пусть $L \geq d$. Тогда вектора $P(\lambda_m, j)$, где $m = 1, \dots, p$, $j = 0, \dots, k_m - 1$, образуют базис траекторного пространства $\Lambda^{(L)}$ ряда F .

Доказательство. Для временного ряда F и любого целого $n \geq 0$ из предложения 3.1 следует, что

$$\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \\ \vdots \\ f_{n+L-1} \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^p \sum_{j=0}^{k_m-1} c_{mj}^{(n)} Q(\lambda_m, j) = \sum_{m=1}^p \sum_{j=0}^{k_m-1} a_{mj}^{(n)} P(\lambda_m, j),$$

причем коэффициенты $a_{mj}^{(n)}$ ненулевые и вещественные. Произвольность выбора n и очевидная независимость векторов $P(\lambda_m, j)$ завершает доказательство предложения.

3.2. Многомерные ряды конечного ранга

В этом подразделе мы рассмотрим частный случай многомерных рядов конечного ранга, а именно, систему одномерных рядов конечной размерности. Естественно, такие многомерные ряды являются рядами конечного ранга и могут быть продолжены по линейным рекуррентным формулам, управляющим отдельными рядами. Остается исследовать вопрос, как размерность многомерного ряда определяется на основе размерностей одномерных рядов, и какой вид имеет базис траекторного пространства такого многомерного ряда. В следующем разделе мы рассмотрим вопросы продолжимости рядов конечного ранга в общем случае.

Итак, рассмотрим систему бесконечных рядов $F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(s)}$, выберем длину окна $L > 1$ и обозначим $\Lambda^{(L,1)}, \dots, \Lambda^{(L,s)}$ их траекторные пространства. Пусть $\Lambda^{(L)}$ – траекторное пространство многомерного ряда $(F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(s)})$.

Обозначим ранги одномерных рядов $F^{(m)}$ как $d_m = \dim \Lambda^{(L,m)}$, $m = 1, \dots, s$. Здесь и далее m – номер ряда. Для каждого из рядов $F^{(m)}$ можно записать минимальную линейную рекуррентную формулу:

$$(8) \quad f_{j+d_m}^{(m)} = \sum_{k=1}^{d_m} a_k^{(m)} f_{j+d_m-k}^{(m)}, \text{ где } a_{d_m}^{(m)} \neq 0, m = 1, \dots, s.$$

Рассмотрим характеристические полиномы рекуррентных формул (8)

$$(9) \quad P_{d_m}^{(m)}(\lambda) = \lambda^{d_m} - \sum_{k=1}^{d_m} a_k^{(m)} \lambda^{d_m-k}, m = 1, \dots, s,$$

и введем следующие обозначения:

$p^{(m)}$ – количество различных корней полинома $P_{d_m}^{(m)}(\lambda)$,

$\lambda_r^{(m)}$ – r -й корень полинома $P_{d_m}^{(m)}(\lambda)$,

$k_r^{(m)}$ – кратность корня $\lambda_r^{(m)}$.

Таким образом, имеют место соотношения

$$k_1^{(m)} + \dots + k_{p^{(m)}}^{(m)} = d_m, \quad m = 1, \dots, s.$$

Обозначим, наконец,

$\lambda_1, \dots, \lambda_p$ – объединение множества корней полиномов $P_{d_1}^{(1)}(\lambda), \dots, P_{d_s}^{(s)}(\lambda)$,

$\kappa_1, \dots, \kappa_p$ – кратности корней $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

В случае совпадающих корней кратность корня в объединенном множестве считается равной максимальной из кратностей совпадающих корней.

Предложение 3.3.

1. Ранг многомерного ряда $(F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(s)})$ равен $d = \sum_{r=1}^p \kappa_r$.
2. Вектора $P(\lambda_r, j)$, где $r = 1, \dots, p$, $j = 0, \dots, \kappa_r - 1$, образуют базис пространства $\Lambda^{(L)}$.

Доказательство. Утверждения следуют из предложения 3.2 и структуры траекторной матрицы многомерного ряда.

Замечание 3.3. Если характеристические полиномы (9) имеют только общие корни, то временные ряды $F^{(m)}$, $m = 1, \dots, s$, состоят из аддитивных компонент одного вида. Такие ряды можно называть *согласованными*. Для согласованных рядов ранг многомерного ряда существенно меньше суммы рангов рядов. Наоборот, если множества корней этих полиномов не пересекаются, то структура у каждого ряда своя и общих компонент ряды не имеют. При этом ранг системы рядов в точности равен сумме рангов рядов. При анализе реальных временных рядов мы, как правило, находимся между описанными ситуациями.

4. Продолжение временных рядов

В теории одномерного метода «Гусеница»-SSA продолжение временных рядов конечного ранга выполняется непосредственно по линейной рекуррентной формуле, которую порождает траекторное пространство ряда. Для системы временных рядов возникает несколько способов продолжения, что связано с несимметричностью траекторной матрицы многомерного временного ряда (строки и столбцы траекторной матрицы имеют различную структуру). В этом разделе мы опишем каждый из вариантов продолжения. В данном разделе будем рассматривать случай рядов одинаковой длины, но все результаты обобщаются на случай рядов различной длины.

Рассмотрим систему из s вещественнозначных временных рядов $F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(s)}$ одинаковой длины N и выберем длину окна $1 < L < N$. Обозначим за $\Lambda^{(L)} \in \mathbf{R}^L$ траекторное пространство, порожденное $K = N - L + 1$ столбцами траекторной матрицы \mathbf{X} многомерного ряда $(F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(s)})$, а за $\Lambda^{(K)} \in \mathbf{R}^K$ – пространство, натянутое на вектора-строки матрицы \mathbf{X} . Пусть $d = \text{rank } \mathbf{X} = \dim \Lambda^{(L)} = \dim \Lambda^{(K)}$.

Целью этого раздела является построение условий продолжения ряда в пространстве столбцов и в пространстве строк траекторной матрицы.

Но сначала приведем необходимые сведения из линейной алгебры.

4.1. Подпространства и углы между ними

В этом разделе мы приведем некоторые результаты, касающиеся линейных подпространств евклидова пространства и величине угла между ними.

Рассмотрим n -мерное евклидово пространство \mathbf{R}^n . Для двух произвольных систем векторов $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ и ψ_1, \dots, ψ_m этого пространства обозначим

$$\Gamma(\{\varphi_i\}_{i=1}^l, \{\psi_j\}_{j=1}^m) = \begin{pmatrix} (\varphi_1, \psi_1) & (\varphi_1, \psi_2) & \dots & (\varphi_1, \psi_m) \\ (\varphi_2, \psi_1) & (\varphi_2, \psi_2) & \dots & (\varphi_2, \psi_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_l, \psi_1) & (\varphi_l, \psi_2) & \dots & (\varphi_l, \psi_m) \end{pmatrix}.$$

Пусть Λ_1 и Λ_2 – два подпространства размерности p и q . Обозначим базисы этих подпространств следующим образом: $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ и $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_q$. Рассмотрим матрицы Грамма

$$\Gamma_1 = \Gamma(\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^p, \{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^p),$$

$$\Gamma_2 = \Gamma(\{\mathbf{b}_j\}_{j=1}^q, \{\mathbf{b}_j\}_{j=1}^q)$$

и введем также матрицу

$$\Phi = \Gamma(\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^p, \{\mathbf{b}_j\}_{j=1}^q).$$

Определение 4.1. Угол $\phi = \phi(\Lambda_1, \Lambda_2)$ между подпространствами Λ_1 и Λ_2 определяется соотношениями

$$\cos^2 \phi = \frac{\det(\Phi \Phi^T)}{\det(\Gamma_1) \det(\Gamma_2)}, \text{ если } p \leq q,$$

$$\cos^2 \phi = \frac{\det(\Phi^T \Phi)}{\det(\Gamma_1) \det(\Gamma_2)}, \text{ если } p > q.$$

Доказательство следующего предложения содержится в [4].

Предложение 4.1. Имеют место следующие утверждения:

1. $\det(\Phi \Phi^T) \leq \det(\Gamma_1) \det(\Gamma_2)$.
2. Равенство $\det(\Phi \Phi^T) = \det(\Gamma_1) \det(\Gamma_2)$, т.е. $\cos^2 \phi = 1$, выполняется тогда и только тогда, когда одно из подпространств Λ_1 и Λ_2 содержится в другом (если $p \neq q$) или если подпространства совпадают (если $p = q$).
3. Угол между подпространствами Λ_1 и Λ_2 равен углу между их ортогональными дополнениями: $\phi(\Lambda_1, \Lambda_2) = \phi(\Lambda_1^\perp, \Lambda_2^\perp)$.

Рассмотрим теперь случай, когда одно из подпространств имеет специфический вид. А именно, пусть Λ_1 – такое подпространство \mathbf{R}^n размерности p , что его базис образует некоторая подсистема $\{\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_p}\}$ стандартного базиса из ортов $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Пусть также подсистема $\{\mathbf{a}_{j_1}, \dots, \mathbf{a}_{j_q}\}$ некоторого ортонормированного базиса $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ задает Λ_2 , $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj})^T$.

В такой ситуации имеем

$$\Phi = \{(\mathbf{e}_{i_l}, \mathbf{a}_{j_m})\}_{l=1, m=1}^{p, q} = \{a_{i_l j_m}\}_{l=1, m=1}^{p, q}.$$

Обозначим \mathbf{I}_{ss} единичную матрицу размерности $s \times s$. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 4.2. Если $p + q \leq n$, то угол между Λ_1 и Λ_2^\perp определяется соотношением

$$\cos^2 \phi(\Lambda_1, \Lambda_2^\perp) = \det(\mathbf{I}_{pp} - \Phi\Phi^T).$$

Доказательство. Рассмотрим два базиса пространства \mathbf{R}^n : стандартный базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, а также некоторый базис $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$. Без потери общности далее можно считать базисы такими, что

$$\begin{aligned} \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p\} & \text{ – базис } \Lambda_1, & \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_q\} & \text{ – базис } \Lambda_2, \\ \{\mathbf{e}_{p+1}, \dots, \mathbf{e}_n\} & \text{ – базис } \Lambda_1^\perp, & \{\mathbf{a}_{q+1}, \dots, \mathbf{a}_n\} & \text{ – базис } \Lambda_2^\perp. \end{aligned}$$

Для этой пары базисов евклидова пространства \mathbf{R}^n рассмотрим $\Psi = \{(\mathbf{e}_i, \mathbf{a}_j)\}_{i,j=1}^n$.

$$\Psi = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} & a_{1,q+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{p,q} & a_{p,q+1} & \dots & a_{pn} \\ a_{p+1,1} & \dots & a_{p+1,q} & a_{p+1,q+1} & \dots & a_{p+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nq} & a_{n,q+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{pq} & \mathbf{B}_{p(n-q)} \\ \mathbf{C}_{(n-p)q} & \mathbf{D}_{(n-p)(n-q)} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\Psi\Psi^T = \mathbf{I}_{nn}$ и, следовательно, $\mathbf{B}_{p(n-q)}\mathbf{B}_{p(n-q)}^T + \mathbf{A}_{pq}\mathbf{A}_{pq}^T = \mathbf{I}_{pp}$, то из предложения 4.1 следует, что

$$\cos^2 \phi(\Lambda_1, \Lambda_2^\perp) = \det(\mathbf{B}_{p(n-q)}\mathbf{B}_{p(n-q)}^T) = \det(\mathbf{I}_{pp} - \mathbf{A}_{pq}\mathbf{A}_{pq}^T).$$

Поскольку $\Phi = \mathbf{A}_{pq}$, то предложение доказано.

Предложение 4.3. В условиях предложения 4.2, $\cos^2 \phi(\Lambda_1, \Lambda_2^\perp) > 0$ тогда и только тогда, когда пространства Λ_1 и Λ_2 не имеют ни одного ненулевого общего вектора.

Доказательство. В обозначениях, введенных в доказательстве предложения 4.2, получаем, что условие $\cos^2 \phi(\Lambda_1, \Lambda_2^\perp) = \cos^2 \phi(\Lambda_2, \Lambda_1^\perp) = 0$ равносильно тому, что $\det(\mathbf{C}_{(n-p)q}^T \mathbf{C}_{(n-p)q}) = 0$, что, в свою очередь, означает, что вектора-столбцы матрицы $\mathbf{C}_{(n-p)q}$ зависимы между собой, т.е. существует линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору. Поэтому линейная комбинация с такими же коэффициентами векторов a_1, \dots, a_q , составляющих базис пространства Λ_2 , имеет $n - p$ последних нулевых координат. Таким образом, мы построили вектор, который принадлежит как Λ_1 , так и Λ_2 .

Замечание 4.1. Из условия, что пространства Λ_1 и Λ_2 не имеют ни одного ненулевого общего вектора (т.е. пересекаются в нуле), следует выполнение условия $p + q \leq n$.

4.2. Многомерное L -продолжение

Рассмотрим сначала продолжение многомерного ряда в пространстве столбцов $\Lambda^{(L)}$. Оно полностью аналогично одномерному случаю. Поэтому соответствующие результаты приведем без доказательства.

Определение 4.2. Многомерный ряд $(F_N^{(1)}, F_N^{(2)}, \dots, F_N^{(s)})$ допускает L -продолжение, если существует единственный вектор $R_N = (\tilde{f}_N^{(1)}, \tilde{f}_N^{(2)}, \dots, \tilde{f}_N^{(s)})^T$ такой, что все вектора L -вложения многомерного ряда $(\tilde{F}_{N+1}^{(1)}, \tilde{F}_{N+1}^{(2)}, \dots, \tilde{F}_{N+1}^{(s)})$, где $\tilde{F}_{N+1}^{(m)} = (f_0^{(m)}, \dots, f_{N-1}^{(m)}, \tilde{f}_N^{(m)})$, $m = 1, \dots, s$, принадлежат $\Lambda^{(L)}$.

Фактически в определении 4.2 для существования продолжения требуется, чтобы для любого $m = 1, \dots, s$ вектора $(f_{N-L+1}^{(m)}, \dots, f_{N-1}^{(m)}, \tilde{f}_N^{(m)})^T$ принадлежали пространству столбцов $\Lambda^{(L)}$, так как все остальные вектора вложения принадлежат этому пространству по определению.

Для любого L -мерного вектора X обозначим X^∇ вектор, состоящий из первых $L-1$ компонент вектора X . Обозначим P_1, \dots, P_d некоторый ортонормированный базис пространства $\Lambda^{(L)}$. Заметим, что в методе MSSA (и в SSA) в качестве такого базиса берутся левые сингулярные вектора U_1, \dots, U_d сингулярного разложения траекторной матрицы ряда.

Пусть π_j – последняя координата вектора P_j . Обозначим, наконец, $\nu^2 = \pi_1^2 + \dots + \pi_d^2$.

Введем матрицу из последних $(L-1)$ значений временных рядов \mathbf{Y} :

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} f_{N-L+1}^{(1)}, \dots, f_{N-1}^{(1)} \\ f_{N-L+1}^{(2)}, \dots, f_{N-1}^{(2)} \\ \vdots \\ f_{N-L+1}^{(s)}, \dots, f_{N-1}^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Лемма 4.1 Если $\mathbf{e}_L \notin \Lambda^{(L)}$, то $\nu^2 < 1$.

Доказательство. Отметим, что ν^2 есть просто квадрат косинуса угла между \mathbf{e}_L и пространством $\Lambda^{(L)}$, а $(1-\nu^2)$ – это квадрат косинуса угла между \mathbf{e}_L и пространством $(\Lambda^{(L)})^\perp$. Значит, если $\mathbf{e}_L \notin \Lambda^{(L)}$, то $\nu^2 < 1$.

Предложение 4.4. Многомерный временной ряд $(F_N^{(1)}, F_N^{(2)}, \dots, F_N^{(s)})$ допускает L -продолжение тогда и только тогда, когда $\mathbf{e}_L \notin \Lambda^{(L)}$, а само продолжение имеет в этом случае вид

$$(10) \quad R_N = \mathbf{Y} S_L, \text{ где } S_L = \frac{1}{1-\nu^2} \sum_{j=1}^d \pi_j P_j^\nabla \in \mathbf{R}^{L-1}.$$

Заметим, что формула (10) означает продолжение каждого из рядов, входящих в систему, по одной и той же одномерной ЛРФ, порожденной всей совокупностью рядов.

4.2. Многомерное K -продолжение

Рассмотрим теперь продолжение многомерного ряда в пространстве строк траекторной матрицы. Его свойства уже несколько отличаются от свойств одномерного продолжения.

Определение 4.2. Многомерный ряд $(F_N^{(1)}, F_N^{(2)}, \dots, F_N^{(s)})$ допускает K -продолжение, если существует единственный вектор $R_N = (\tilde{f}_N^{(1)}, \tilde{f}_N^{(2)}, \dots, \tilde{f}_N^{(s)})^T$ такой, что все вектора-строки траекторной матрицы многомерного ряда

$(\tilde{F}_{N+1}^{(1)}, \tilde{F}_{N+1}^{(2)}, \dots, \tilde{F}_{N+1}^{(s)})$, где $\tilde{F}_{N+1}^{(m)} = (f_0^{(m)}, \dots, f_{N-1}^{(m)}, \tilde{f}_N^{(m)})$, $m = 1, \dots, s$, при длине окна, равной $L + 1$, принадлежат $\Lambda^{(K)}$.

Для любого вектора $X \in \mathbf{R}^{Ks}$ обозначим $X^{\nabla s} \in \mathbf{R}^{(K-1)s}$ вектор, состоящий из всех компонент вектора X , кроме элементов с номерами, кратными K . Обозначим Q_1, \dots, Q_d некоторый ортонормированный базис пространства $\Lambda^{(K)}$. Заметим, что в методе MSSA в качестве такого базиса берутся правые сингулярные вектора V_1, \dots, V_d сингулярного разложения траекторной матрицы ряда. Рассмотрим линейное векторное пространство $\Lambda^{(K, \nabla s)}$, натянутое на вектора $Q_1^{\nabla s}, \dots, Q_d^{\nabla s}$. Пусть $\pi_j^{(m)}$ – элемент вектора Q_j с номером Km , где $m = 1, \dots, s$. Обозначим

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \pi_1^{(1)} & \pi_2^{(1)} & \dots & \pi_d^{(1)} \\ \pi_1^{(2)} & \pi_2^{(2)} & \dots & \pi_d^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_1^{(s)} & \pi_2^{(s)} & \dots & \pi_d^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = (Q_1^{\nabla s}, Q_2^{\nabla s}, \dots, Q_d^{\nabla s}).$$

Введем вектора последних $(K - 1)$ значений временных рядов

$$\mathbf{Z}^{(m)} = (f_{N-K+1}^{(m)}, \dots, f_{N-1}^{(m)})^T, \quad m = 1, \dots, s,$$

и составим из них вектор последних значений всей совокупности рядов $\mathbf{Z} \in \mathbf{R}^{(K-1)s}$:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}^{(1)} \\ \mathbf{Z}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{Z}^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Итак, мы сделали все необходимые нам обозначения и можем сформулировать утверждения, определяющие вид и условия для K -продолжения многомерных временных рядов.

Предложение 4.5. Многомерный временной ряд $(F_N^{(1)}, F_N^{(2)}, \dots, F_N^{(s)})$ допускает K -продолжение тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух эквивалентных условий

1. Пространства $\Lambda_1 = \{\mathbf{e}_K, \mathbf{e}_{2K}, \dots, \mathbf{e}_{sK}\}$ и $\Lambda_2 = \Lambda^{(K)}$ пересекаются в одной единственной точке $\mathbf{0}$.
2. Существует $(\mathbf{I}_{ss} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T)^{-1}$ и $d \leq (K - 1)s$.

Само продолжение в этом случае находится по формуле

$$(11) \quad R_N = (\mathbf{I}_{ss} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T)^{-1} \mathbf{W}\mathbf{Q}^T \mathbf{Z}.$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что эквивалентность условий 1 и 2 следует из предложения 4.3 и замечания к нему. Теперь докажем эквивалентность этих условий K -продолжимости временного ряда.

Необходимость.

Предположим, что многомерный ряд $(F_N^{(1)}, F_N^{(2)}, \dots, F_N^{(s)})$ допускает K -продолжение. Согласно определению 4.3, существует единственный набор чисел $(\tilde{f}_N^{(1)}, \tilde{f}_N^{(2)}, \dots, \tilde{f}_N^{(s)})$ такой, что все вектора-строки траекторной матрицы продолженного ряда при длине окна, равной $L + 1$, принадлежат $\Lambda^{(K)}$.

Если теперь подпространства Λ_1 и Λ_2 имеют некоторую ненулевую общую точку (p_1, p_2, \dots, p_s) , то набор $(\tilde{f}_N^{(1)} + p_1, \tilde{f}_N^{(2)} + p_2, \dots, \tilde{f}_N^{(s)} + p_s)$ также является K -продолжением, т.е. мы приходим к противоречию. Таким образом, пространства Λ_1 и Λ_2 могут пересекаться в одной единственной точке $\mathbf{0}$, и необходимость доказана.

Достаточность.

Пусть $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \{\mathbf{0}\}$. Покажем сначала, что для любого вектора $Z \in \Lambda^{(K, \nabla^s)}$ существует единственный вектор $Y \in \Lambda^{(K)}$, такой что $Y^{\nabla^s} = Z$.

В самом деле, поскольку вектора $Q_1^{\nabla^s}, \dots, Q_d^{\nabla^s}$ являются образующими пространства $\Lambda^{(K, \nabla^s)}$, то $Z = h_1 Q_1^{\nabla^s} + \dots + h_d Q_d^{\nabla^s}$. Вектор $Y = h_1 Q_1 + \dots + h_d Q_d$ принадлежит пространству $\Lambda^{(K)}$ и, поскольку $Y^{\nabla^s} = Z$, существование доказано.

Пусть $Y_1, Y_2 \in \Lambda^{(K)}$ и $Y_1^{\nabla^s} = Y_2^{\nabla^s} = Z$. Тогда, во-первых, разница $Y_1 - Y_2 \in \Lambda^{(K)}$ и, в то же время, $Y_1 - Y_2 \in \Lambda_1$, что одновременно невозможно. Следовательно, в случае, когда $Y_1 \neq Y_2$ приходим к противоречию. Таким образом, доказана и единственность.

Теперь перейдем к построению аналитической формулы для прогноза многомерного ряда. Возьмем $V = (Z^{(1)T}, 0, Z^{(2)T}, 0, \dots, Z^{(s)T}, 0)^T$. Тогда найдутся такие числа h_k и $y^{(j)}$, что $V + \sum_{j=1}^s y^{(j)} \mathbf{e}_{Kj} = \sum_{k=1}^d h_k Q_k$. Взяв скалярное произведение обеих частей последнего равенства и Q_k , получаем

$$(12) \quad h_k = (Q_k^{\nabla^s}, Z) + \sum_{j=1}^s y^{(j)} \pi_k^{(j)}, \quad k = 1, \dots, d.$$

Если обозначить $H = (h_1, h_2, \dots, h_d)^T$ и $Y = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(s)})^T$, то систему равенств (12) можно переписать как

$$(13) \quad H = \mathbf{Q}^T Z + \mathbf{W}^T Y.$$

Умножая скалярно обе части того же равенства на вектор \mathbf{e}_{Kj} , получим соответственно

$$y^{(1)} = \sum_{k=1}^d h_k \pi_k^{(1)}, \quad y^{(2)} = \sum_{k=1}^d h_k \pi_k^{(2)}, \quad \dots, \quad y^{(s)} = \sum_{k=1}^d h_k \pi_k^{(s)}$$

или в матричной записи

$$(14) \quad Y = \mathbf{W}H.$$

Из равенств (13) и (14) следует, что

$$Y = \mathbf{W}(\mathbf{Q}^T Z + \mathbf{W}^T Y).$$

С учетом наших предположений о существовании обратной матрицы $(\mathbf{I}_{ss} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T)^{-1}$, отсюда и следует, что

$$Y = (\mathbf{I}_{ss} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T)^{-1} \mathbf{W}\mathbf{Q}^T Z.$$

Взяв $\tilde{f}_N^{(m)} = y^{(m)}$ для $m = 1, \dots, s$, получаем $R_N = Y$. Таким образом, мы показали возможность продолжения, и нашли его явный вид.

Замечание 4.2. Формулу (11) можно назвать многомерной линейной рекуррентной формулой.

5. Прогноз временных рядов. Численный пример

В предыдущем разделе рассматривалась идеальная ситуация, в которой был возможен идеальный прогноз – продолжение ряда. Но при анализе реальных временных рядов такая ситуация случается редко. Поэтому рассмотрим более общий случай.

Сначала заметим следующее. Пусть подпространство столбцов $\Lambda^{(L)}$ (или подпространство строк $\Lambda^{(K)}$, в зависимости от того, какой способ прогноза используется) траекторной матрицы ряда, допускающего продолжение, известно лишь приближенно. Обозначим это приближенное пространство Λ_r , $\dim \Lambda_r = r$. Тогда для построения прогноза (приближенного продолжения) можно заменить $\Lambda^{(L)}$ (или $\Lambda^{(K)}$) в описании продолжения на Λ_r , а прогноз по-прежнему строить по формулам (10) или (11). Смысл такого прогноза (который называется рекуррентным) для одномерного случая подробно описан в [7]. Условия существования такого прогноза будут определяться уже свойствами пространства Λ_r .

Осталось пояснить, откуда берется приближенное подпространство Λ_r . Пусть наблюдаемый ряд H состоит из суммы ряда F , допускающего продолжение, и остатка G . Рассмотрим разложение временного ряда, построенное с помощью многомерного SSA. Если ряды F и G приближенно разделимы (см. [6] для точного определения этого понятия), то на этапе группировки мы можем выбрать набор индексов $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ так, чтобы матрица X_I , построенная как сумма элементарных матриц сингулярного разложения (2) траекторной матрицы ряда H с индексами из I , была близка к траекторной матрице ряда F . Возьмем в качестве Λ_r пространство столбцов (или строк) матрицы X_I . В качестве базиса P_j , $j = 1, \dots, r$ (или Q_j , $j = 1, \dots, r$) подпространства Λ_r можно взять левые сингулярные вектора U_j , $j \in I$ (или правые сингулярные вектора V_j , $j \in I$). Формулы (10) или (11) дают нам рекуррентные формулы для прогноза ряда. Остается еще вопрос, что брать в качестве начальных значений для этих формул. Решение этой проблемы следующее. При построении матрицы начальных значений Y (или вектора начальных значений Z) вместо значений исходного ряда можно использовать значения восстановленного ряда, т.е. ряда, полученного с помощью диагонального усреднения матрицы X_I . Будем называть описанные варианты прогноза как MSSA-L и MSSA-K.

Главным предположением для возможности прогнозирования является предположение о приближенной разделимости рядов F и G , а точность прогноза напрямую зависит от качества этой разделимости.

Сравним с помощью моделирования точность прогноза для различных схем прогноза при разных длинах окна. Возьмем двумерный случай $s = 2$ и сравним прогнозы в пространстве столбцов MSSA-L и в пространстве строк MSSA-K между собой, а также с прогнозом каждого ряда по отдельности с помощью одномерного рекуррентного прогноза на основе SSA [3,7].

Так как все рассматриваемые варианты прогноза задаются рекуррентными формулами, то с помощью этих рекуррентных формул можно делать прогноз на любое число точек вперед.

Опишем схему исследования. Предположим, что имеется некоторый бесконечный двумерный сигнал $(F^{(1)}, F^{(2)})$, будем рассматривать ряд $(F_N^{(1)}, F_N^{(2)})$, состоящий из его первых N точек, выберем длину окна L и зафиксируем правило выбора собственных троек, соответствующих сигналу (для разных вариантов метода этот выбор, в принципе, может быть различным). Тогда мы можем промоделировать V независимых реализаций $(G_{N,k}^{(1)}, G_{N,k}^{(2)})$ двумерного гауссовского белого шума с дисперсией σ^2 и затем применить процедуру прогноза на M точек к V независимым временным рядам

$$(H_{N,k}^{(1)}, H_{N,k}^{(2)}) \stackrel{\text{def}}{=} (F_N^{(1)} + G_{N,k}^{(1)}, F_N^{(2)} + G_{N,k}^{(2)}), \quad k = 1, \dots, V.$$

Результатом является выборка из прогнозов на M шагов вперед:

$$(f_{N,k}^{(1)}, \dots, f_{N+M-1,k}^{(1)}), \quad (f_{N,k}^{(2)}, \dots, f_{N+M-1,k}^{(2)}) \quad k = 1, \dots, V.$$

Другие варианты прогноза выполняются параллельно, с теми же реализациями шумового процесса.

Введем обозначения для ошибок:

$MSE^{(1)}, MSE^{(2)}$ – оценки средних квадратов отклонений прогнозов первого и второго рядов от истинных значений, полученных из $(F^{(1)}, F^{(2)})$,

$MSE = MSE^{(1)} + MSE^{(2)}$ – суммарная оценка среднего квадрата отклонения.

Ниже рассмотрим два примера. В первом из них сигналы $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ выбираем согласованными, поэтому метод MSSA должен проявлять свои преимущества по сравнению с одномерными SSA. Во втором случае выбираем ряды несогласованными и тут одномерный SSA должен показать свое преимущество. Проверим, подтверждаются ли наши утверждения в численных экспериментах.

Возьмем $N = 71$, $\sigma^2 = 25$, $V = 10000$, $M = 24$.

Пример 5.1. Гармонические ряды с одинаковыми периодами.

$$f_k^{(1)} = 30 \cos(2\pi k / 12), \quad f_k^{(2)} = 20 \cos(2\pi k / 12 + \pi / 4), \quad k = 0, \dots, N - 1.$$

По качеству восстановления сигнала (т.е. делимости от шума) метод MSSA лучше, чем SSA. Этот же результат, как следствие, проявляется и при сравнении точности прогнозов (таблица 5.1).

Таблица 5.1. Согласованные ряда: зависимость MSE от длины окна L .

Метод	$L = 12$	$L = 24$	$L = 36$	$L = 48$	$L = 60$
MSSA-L	10.685	7.119	7.258	7.345	8.609
MSSA-K	12.003	8.255	7.462	6.574	7.802
SSA	14.319	10.999	12.260	12.616	15.646

Сравним теперь более подробно две схемы прогноза двумерного варианта метода MSSA-L и MSSA-K. Предварительные численные эксперименты показывали, что оптимальная длина окна в смысле качества разделимости равна $L = 48$. Из рис.1 видно, что при оптимальном L или большем, чем оптимальное, схема MSSA-K оказывается более точной, чем MSSA-L. И наоборот, при маленьких L точнее оказывается схема L -прогноза.

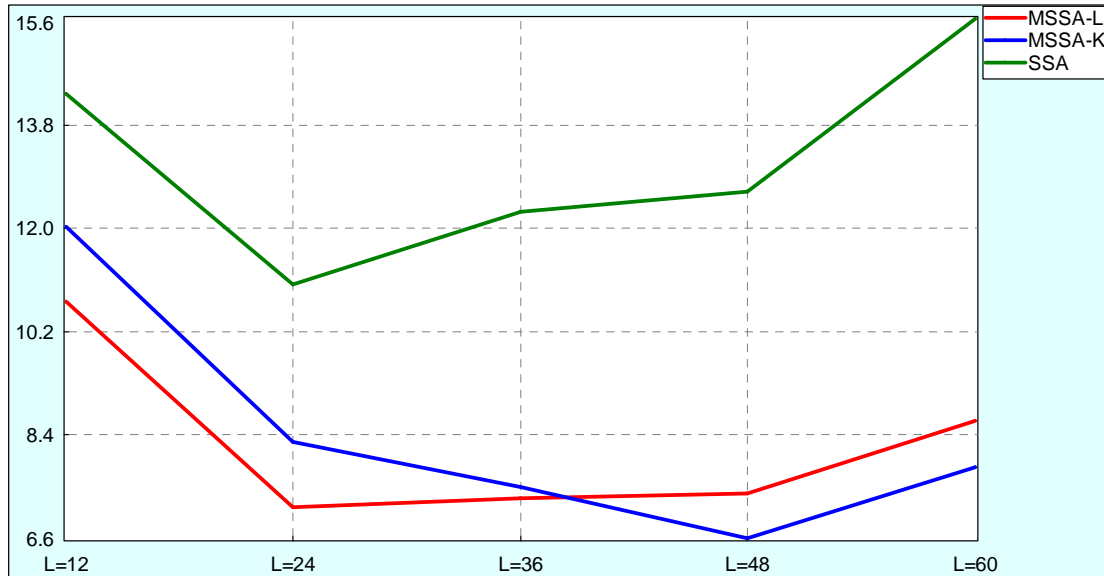


Рис. 1. Согласованные ряды: график зависимости MSE от длины окна L .

Пример 5.2. Гармонические ряды с разными периодами.

$$f_k^{(1)} = 30 \cos(2\pi k / 12), f_k^{(2)} = 20 \cos(2\pi k / 8 + \pi / 4), k = 0, \dots, N - 1.$$

Таблица 5.2 подтверждает, что ряды с разной структурой лучше анализировать и прогнозировать по отдельности, хотя при правильном выборе длины окна (в данном случае, $L = 48$) разница незначительная.

Таблица 5.2. Несогласованные ряды: зависимость MSE от длины окна L .

Метод	$L = 12$	$L = 24$	$L = 36$	$L = 48$	$L = 60$
MSSA-L	50.583	14.580	15.187	14.693	17.956
MSSA-K	39.215	16.910	15.996	13.220	16.300
SSA	14.588	11.109	12.647	12.773	16.008

Список литературы

1. Elsner J., Tsonis A. Singular Spectrum Analysis. A New Tool in Time Series Analysis. New York: Plenum Press, 1996. 163 p.
2. Голяндина Н.Э., Данилов Д.Л. Обработка многомерных временных рядов с помощью метода «Гусеница» // Главные компоненты временных рядов: метод «Гусеница» / Под ред. Д.Л. Данилова, А.А. Жиглявского. 1997. СПб: Пресском, С. 105-131.
3. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC. 2001. 305 p.
4. Risteski I.B., Trencovski K.G. Principal Values and Principal Subspaces of Two Subspaces of Vector Spaces with Inner Product // Beitrage zur Algebra und Geometrie, Contributions to Algebra and Geometry. 2001. No 42. P. 289-300.
5. Голяндина Н.Э., Некруткин В.В., Степанов Д.В. Варианты метода «Гусеница»-SSA для анализа многомерных временных рядов // Труды II Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'03, Москва, 29-31 января 2003. М.: Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН. 2003. С. 2139-2168.
6. Голяндина Н.Э. Метод «Гусеница»-SSA: анализ временных рядов: Учеб. пособие. СПб: Изд-во СПбГУ, 2004. 76 с.
7. Голяндина Н.Э. Метод «Гусеница»-SSA: прогноз временных рядов: Учеб. пособие. СПб: Изд-во СПбГУ, 2004. 52 с.